Junio 2017. Examen de recuperación

Temas 1 al 3: Fracciones-decimales / Potencias y raíces / Problemas aritméticos

1. Efectúa y simplifica

$$\frac{13}{15}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}-\frac{1}{30}\right)$$

Solución:

a) $\frac{13}{15}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{3}\cdot\frac{6}{5}-\frac{1}{30}\right)=\frac{13}{15}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+2-\frac{1}{30}\right)=\frac{13}{15}-\frac{2}{3}\left(\frac{15}{60}+\frac{120}{60}-\frac{2}{60}\right)=$

$=\frac{13}{15}-\frac{2}{3}\cdot\frac{133}{60}=\frac{13}{15}-\frac{266}{180}=\frac{13}{15}-\frac{133}{90}=\frac{78}{90}-\frac{133}{90}=-\frac{55}{90}=-\frac{11}{18}$

2. Calcula:

$$\left(5^{-1}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)^{0}-\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)^{-2}$$

Solución:

$$\left(5^{-1}+\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)^{0}-\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right):1-\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)^{2}=$$

$$=\left(\frac{4}{20}+\frac{5}{20}\right)-\frac{9}{5}\cdot\frac{4}{81}=\frac{9}{20}-\frac{4}{45}=\frac{81}{180}-\frac{16}{180}=\frac{13}{36}$$

3. Dos ciudades A y B están a 69 km de distancia. Dos ciclistas salen al mismo tiempo de cada una de ellas. El que sale de "A" lleva una velocidad de 24 km/h y el que lo hace de "B" va a 22 km/h. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse y la distancia recorrida por cada uno.

Solución:

A__________________69 km____________________B

$v = 24$ km/h $v = 22$ km/h

La velocidad de aproximación es la suma $24 + 22 = 46$ km/h

El tiempo que tardarán en encontrarse:

$v=\frac{d}{t} \rightarrow t=\frac{d}{v} \rightarrow t=\frac{69}{46} \rightarrow t=1{,}5\text{ horas} \rightarrow t=1\text{ hora y }30\text{ minutos.}$

Distancia recorrida por el ciclista que sale de A: $d = t \cdot v \rightarrow d = 24 \cdot 1{,}5 \rightarrow d = 36$ km

Distancia recorrida por el ciclista que sale de B: $d = 22 \cdot 1{,}5 \rightarrow d = 33$ km

4. a) Halla el número decimal correspondiente a cada uno de estos porcentajes: 75% 130% 2% 5,3%

b) Calcula el 130% de 75.

c) ¿Qué tanto por ciento representa 345 de 1 500?

d) Halla una cantidad sabiendo que le 12% de ella es 87.

Solución:

a) 75% = 0,75; 130% = 1,3; 2% = 0,02; 5,3% = 0,053

b) 75 · 1,3 = 97,5

c) $\frac{345}{1500} \cdot 100 = 23 \quad \rightarrow \quad 345$ representa el 23% de 1500

d) 12% de $x = 87 \rightarrow 0{,}12 \cdot x = 87 \rightarrow x = 87 : 0{,}12 = 725$

Temas 4 al 7: Progresiones / Álgebra / Ecuaciones / Sistemas

5. En una progresión geométrica de razón positiva el primer término vale 4 y el tercero 1/4.

a) ¿Cuánto vale la razón?

b) ¿Cuánto vale la suma de los 8 primeros términos?

c) ¿Cuál es la suma de los infinitos términos?

Todos los resultados se tienen que apoyar en el uso de las fórmulas correspondientes.

Solución:

a) $a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow \frac{1}{4} = 4 \cdot r^2 \rightarrow \frac{1}{16} = r^2 \rightarrow r = \frac{1}{4}$

b) $S_8 = \frac{a_1 - a_8 \cdot r}{1-r} = \frac{4 - 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)}{1 - \frac{1}{4}} \approx 5{,}33325195$

c) $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$

6. a) Utiliza la regla de Ruffini para hallar el cociente y el resto de la división: $(4x^5 - x^3 + x^2 - 1) : (x + 1)$

b) Transforma en producto de factores el polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Solución:

a)

	4	0	–1	1	0	–1
–1		–4	4	–3	2	–2
	4	–4	3	–2	2	–3

Cociente: $4x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x$

Resto: −3

b)

	1	–2	–5	6
1		1	–1	–6
	1	–1	–6	0
–2		–2	6	
	1	–3	0	
3		3		
	1	0		

$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$

7. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x(2x+1)}{3}-\frac{(x+2)^2}{2}+3x=5x-\frac{11}{2}$$

Solución:

$$\frac{2x^2+x}{3}-\frac{x^2+4x+4}{2}+3x=5x-\frac{11}{2}$$

$$\frac{4x^2+2x}{6}-\frac{3x^2+12x+12}{6}+\frac{18x}{6}=\frac{30x}{6}-\frac{33}{6}$$

$$4x^2+2x-3x^2-12x-12+18x=30x-33$$

$$x^2-22x+21=0$$

$$x=\frac{22\pm\sqrt{484-84}}{2}=\frac{22\pm\sqrt{400}}{2}=\frac{22\pm 20}{2}\left\{\begin{array}{l} x=21 \\ \\ x=1 \end{array}\right.$$

8. El doble de un número más la mitad de otro suman 7; y, si sumamos 7 al primero de ellos, obtenemos el quíntuplo del otro. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo para hallar dichos números.

Solución:

Llamamos x al primer número e y al segundo. Así, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+\dfrac{y}{2}=7 \\ x+7=5y \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+y=14 \\ x+7=5y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow\; y=14-4x \\ \rightarrow\; x+7=5(14-4x) \;\rightarrow \end{array}$$

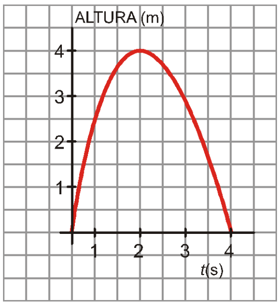
$$\rightarrow\; x+7=70-20x \quad\rightarrow\quad 21x=63 \quad\rightarrow\quad x=\frac{63}{21}=3$$

$y=14-4x=14-4\cdot 3=14-12=2$

Los números son el 3 y el 2.

__Temas 8 al 11: Funciones / Geometría__

9. Lanzamos una pelota hacia arriba. La altura, en metros, viene dada por la siguiente gráfica:



a) ¿Qué altura alcanza al cabo de 1 segundo?
b) ¿Cuál es la altura máxima alcanzada y en qué momento la alcanza?
c) ¿Cuándo decrece la altura de la pelota?
d) ¿Cuál es el dominio? ¿Qué significado tiene?

Solución:

a) 2 metros y medio.
b) 4 metros a los 2 segundos.
c) Entre los 2 segundos y los 4 segundos.
d) De 0 a 4 segundos. Indica el tiempo que pasa desde que lanzamos la pelota hasta que vuelve a su posición inicial.

10. Representa en los mismos ejes la parábola $y = x^2 - 6x + 5$ y la recta $y = -x + 5$.

Observa en qué puntos se cortan y calcula esos puntos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones anteriores.

Solución:

$y = x^2 - 6x + 5$

$$\text{Vértice: } x = \frac{6}{2} = 3, \ y = -4 \ \rightarrow \ V(3, -4)$$

Cortes con el eje X: $y = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

Corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow (0, 5)$

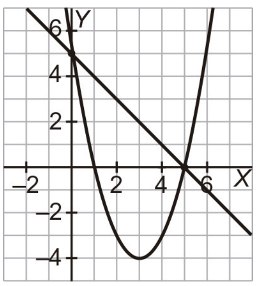
Algunos puntos próximos al vértice: $(2, -3)$, $(4, -3)$

$y = -x + 5 \rightarrow (0, 5)$, $(2, 3)$

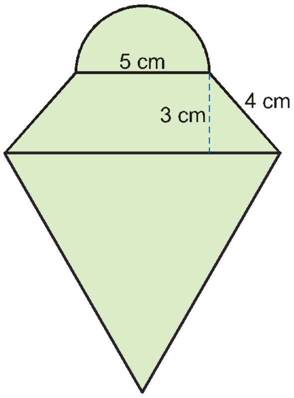
Las gráficas se cortan en los puntos $(0, 5)$ y $(5, 0)$.

Resolvemos el sistema por igualación:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = -x + 5 \end{array}\right\} x^2 - 6x + 5 = -x + 5 \rightarrow x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow \quad y = 5 \\ x = 5 & \rightarrow \quad y = 5 \end{cases}$$



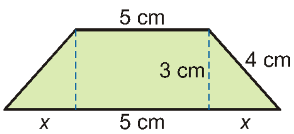
11. Halla el área de la siguiente figura en la que el triángulo inferior es equilátero:



Solución:

– Área del semicírculo $= \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 2{,}5^2}{2} = \dfrac{6{,}25\pi}{2} \approx 9{,}82 \text{ cm}^2 = A_1$

– Área del trapecio $= \dfrac{(B+b)\,\mathrm{h}}{2}$

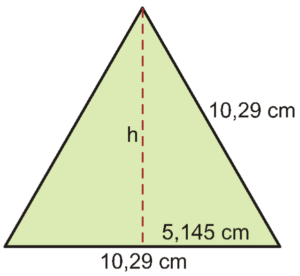


$4^2 = x^2 + 3^2 \;\rightarrow\; 16 = x^2 + 9 \;\rightarrow\; x^2 = 7 \;\rightarrow\; x = \sqrt{7}$

Base mayor $= 5 + 2x = 5 + 2\sqrt{7} \approx 10{,}29$ cm

Área del trapecio $= \dfrac{(10{,}29 + 5) \cdot 3}{2} \approx 22{,}94 \text{ cm}^2 = A_2$

– Área del triángulo equilátero $= \dfrac{B \cdot \mathrm{h}}{2}$



$\mathrm{h} = \sqrt{10{,}29^2 - 5{,}145^2} \approx 8{,}91 \text{ cm}$

Área del triángulo $= \dfrac{10{,}29 \cdot 8{,}91}{2} \approx 45{,}84 \text{ cm}^2 = A_3$

– Área total $= A_1 + A_2 + A_3 = 9{,}82 + 22{,}94 + 45{,}84 = 78{,}6 \text{ cm}^2$